Juin 1998

Mathématiques 30

Examen en vue du diplôme
12e année

Alberta
EDUCATION

371.262
E95
1998:
juin
CDPCOLSP

EX LIBRIS
UNIVERSITATIS
ALBERTENSIS

Droits de reproduction 1998, la Couronne du chef de l'Alberta, représentée par le ministre de l'Éducation, Alberta Education, Student Evaluation Branch, 11160 Jasper Avenue, Edmonton, Alberta, T5K 0L2. Tous droits réservés. On peut acheter des exemplaires supplémentaires de cet examen en s'adressant au Learning Resources Distributing Centre.

Autorisation spéciale est par la présente donnée **seulement aux éducateurs de l'Alberta** de reproduire, à des fins éducatives et dans un but non lucratif, les parties de cet examen qui **ne contiennent pas** d'extrait, **et ce seulement une fois que cet examen aura été administré**.

Les extraits de textes de cet examen **ne peuvent pas** être reproduits sans l'autorisation écrite de l'éditeur original (voir page de **crédits**, le cas échéant).

Juin 1998

Mathématiques 30

Examen en vue du diplôme
12e année

Description

Durée : 2,5 h. Vous pouvez prendre une autre demi-heure pour terminer l'examen.

Ceci est un examen **sans consultation de documents** qui comprend :

- 40 questions à choix multiple et 9 questions à réponse numérique, de valeur égale, comptant pour 70 % de la note de l'examen;
- 3 questions à réponse écrite, de valeur égale, comptant pour 30 % de la note de l'examen.

Ce livret comprend aussi des feuilles à détacher de formules et de cotes z.

Tous les graphiques dans cet examen sont faits à l'ordinateur.

Directives

- Considérez tous les nombres utilisés dans les questions comme étant des nombres **exacts** et non le résultat de mesures.
- Remplissez les renseignements demandés sur la feuille de réponses et sur le livret d'examen en suivant les instructions de l'examinateur.
- Vous êtes tenu d'utiliser votre propre calculatrice scientifique.
- Lisez attentivement les directives pour chaque partie avant de commencer.
- L'examinateur ramassera votre feuille de réponses et votre livret d'examen et les fera parvenir à Alberta Education.
- Ne pliez pas la feuille de réponses.

Attention : *Les pages à l'arrière de ce livret peuvent être détachées et utilisées pour le brouillon. On ne donnera* ***pas de points*** *pour le travail fait sur les pages à détacher.*

Choix multiple

- Lisez attentivement chaque question et choisissez, parmi les réponses proposées, celle qui complète l'énoncé ou répond à la question.

- Trouvez le numéro de cette question sur la feuille de réponses séparée qui vous est fournie et noircissez le cercle qui correspond à votre choix.

  Exemple

  Cet examen porte sur la matière suivante :

  A. biologie
  B. physique
  C. chimie
  D. mathématiques

  Feuille de réponses

  Ⓐ Ⓑ Ⓒ ●

- **Utilisez seulement un crayon à mine HB.**

- Si vous voulez changer une réponse, effacez d'abord **toute** trace de votre première réponse.

Réponse numérique

- Lisez attentivement chaque question.

- Notez votre réponse sur la feuille de réponses fournie en l'écrivant dans les cases et en noircissant ensuite les cercles correspondants.

- **Notez le premier chiffre de votre réponse dans la première case à gauche et laissez vides les cases dont vous n'avez pas besoin.**

- **Utilisez seulement un crayon à mine HB.**

- Si vous voulez changer une réponse, effacez d'abord **toute** trace de votre première réponse.

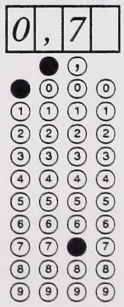
Exemples de questions et solutions

Exemple

Exprimez 40° en radians, en arrondissant au dixième de radian près. 40° = _____ rad.

40° = 0,6981317008 . . . rad

Notez 0,7 sur la feuille de réponses →



Bibliothèque Saint-Jean
University of Alberta

Exemple

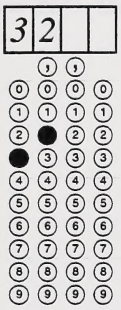
Pour la série arithmétique $-8 + (-5) + (-2) + \ldots + (85)$, le nombre de termes est _____.

$85 = -8 + (n - 1)(3)$

$93 = 3n - 3$

$n = 32$

Notez 32 sur la feuille de réponses ⟶



Exemple

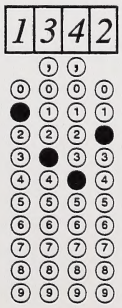
Mettez en ordre alphabétique les matières suivantes qui font l'objet d'un examen en vue du diplôme.

1 biologie
2 physique
3 chimie
4 mathématiques

(Notez votre réponse sous la forme ☐☐☐☐.)

Réponse : 1342

Notez 1342 sur la feuille de réponses ⟶



Réponse écrite

- Lisez attentivement chaque question.
- Écrivez vos réponses aussi lisiblement que possible dans le livret d'examen.
- On ne donnera tous les points **qu'aux solutions indiquant toutes** les explications et formules pertinentes et **tous** les calculs appropriés.
- Vos réponses **devraient être** présentées d'une manière bien organisée, utilisant des phrases complètes pour une réponse écrite et de bonnes unités pour une réponse numérique.

Digitized by the Internet Archive
in 2015

https://archive.org/details/examenenvuedudip00albe_85

1. L'équation $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 4$ est un exemple de fonction

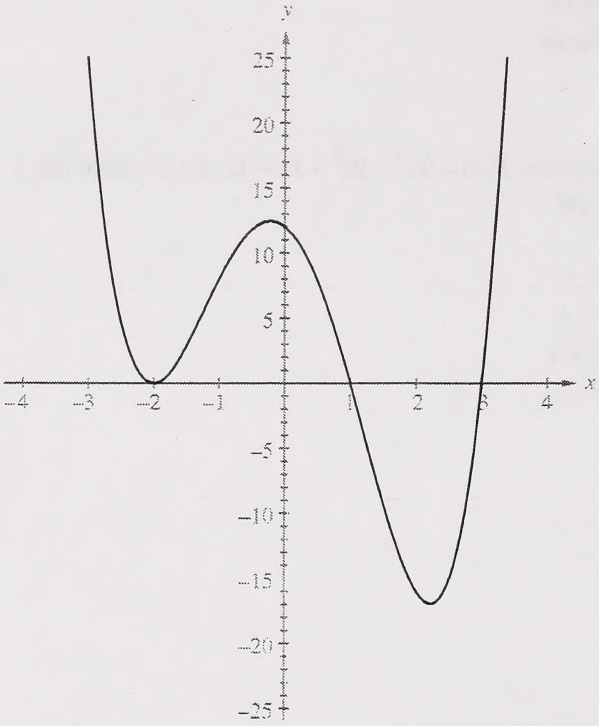
A. quadratique
B. quartique
C. linéaire
D. cubique

2. Si le polynôme $P(x) = 3x^3 - 9x^2 + kx - 12$ est divisible par $x - 3$, alors il est aussi divisible par

A. $3x - 4$
B. $3x + 4$
C. $3x^2 + 4$
D. $3x^2 - 4$

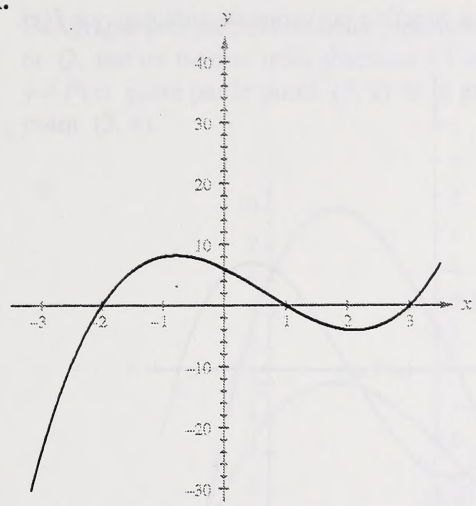
Utilisez l'information ci-dessous pour répondre à la question suivante.

La fonction polynomiale P a seulement des zéros qui sont des nombres entiers. Voici le graphique de $y = P(x)$.

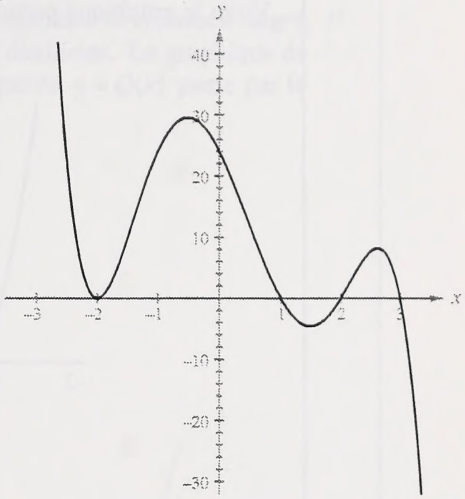


3. Le graphique de $y = (x + 2)\,P(x)$ est

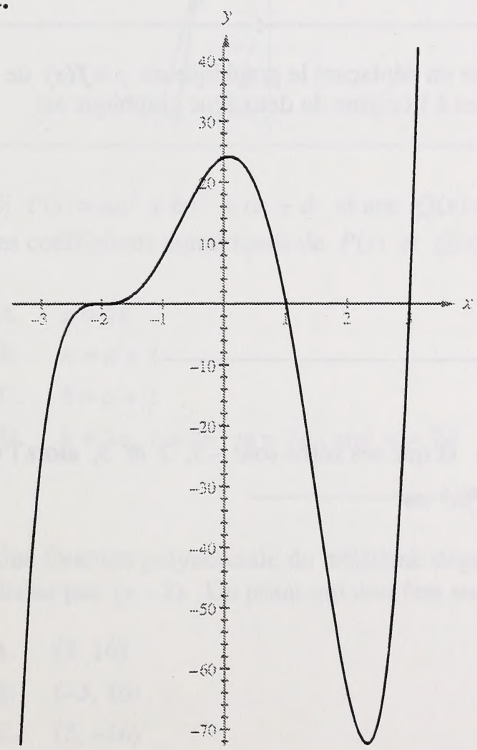
A.



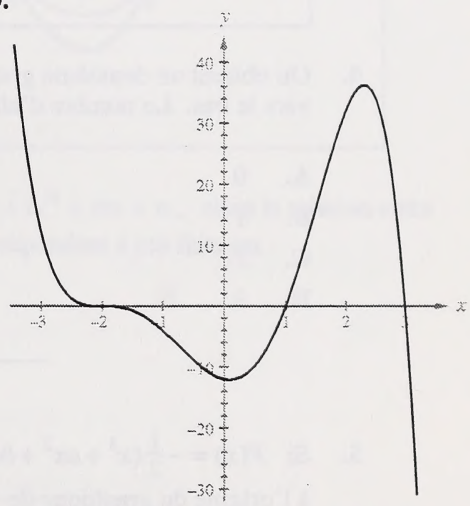
B.



C.

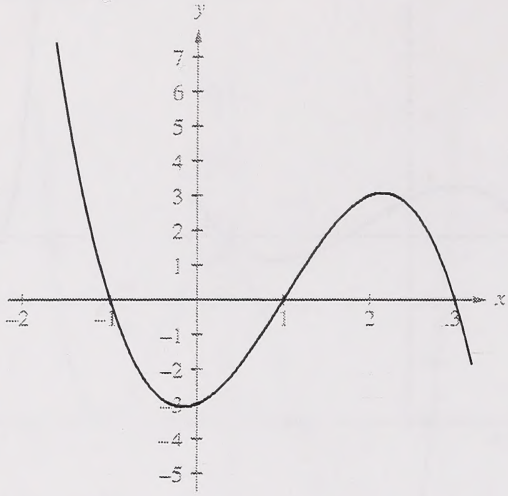


D.



Utilisez l'information ci-dessous pour répondre à la question suivante.

Voici le graphique partiel d'une fonction polynomiale cubique, $y = f(x)$.



4. On obtient un deuxième graphique en déplaçant le graphique de $y = f(x)$ de 6 unités vers le bas. Le nombre d'abscisses à l'origine du deuxième graphique est

A. 0
B. 1
C. 2
D. 3

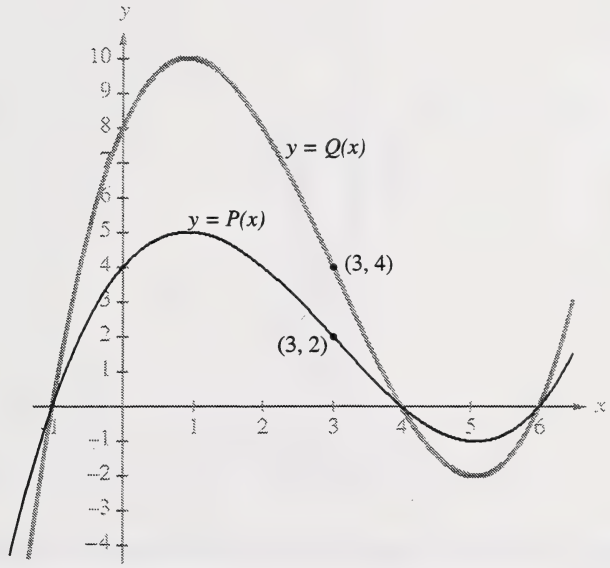
---

5. Si $P(x) = -\frac{1}{2}(x^3 + ax^2 + bx + c)$ et que ses zéros sont -5, 2 et 3, alors l'ordonnée à l'origine du graphique de $y = P(x)$ est

A. −30
B. −15
C. 15
D. 30

Utilisez l'information ci-dessous pour répondre à la question suivante.

Les graphiques partiels de deux fonctions polynomiales du troisième degré, P et Q, ont les mêmes trois abscisses à l'origine distinctes. Le graphique de $y = P(x)$ passe par le point $(3, 2)$ et le graphique de $y = Q(x)$ passe par le point $(3, 4)$.



6. Si $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ et que $Q(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n$, alors la relation entre les coefficients numériques de $P(x)$ et $Q(x)$ correspondant à ces faits est

A. $a = 2k$

B. $n = d + 2$

C. $k = a + 2$

D. $k = 2a,\ l = 2b,\ m = 2c,$ and $n = 2d$

---

7. Une fonction polynomiale du troisième degré, P, a un reste de 16 quand on la divise par $(x - 3)$. Un point qui doit être sur le graphique de $y = P(x)$ est

A. $(3, 16)$

B. $(-3, 16)$

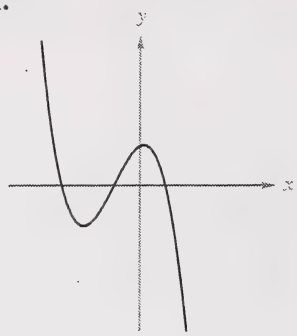
C. $(3, -16)$

D. $(-3, -16)$

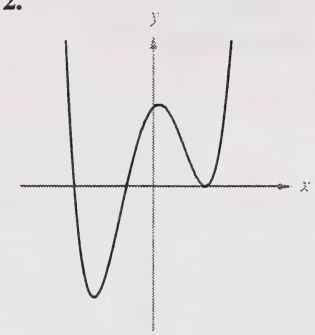
Utilisez l'information ci-dessous pour répondre à la question suivante.

Voici les graphiques de quatre fonctions polynomiales. Chaque fonction polynomiale est du degré minimum correspondant à son graphique.

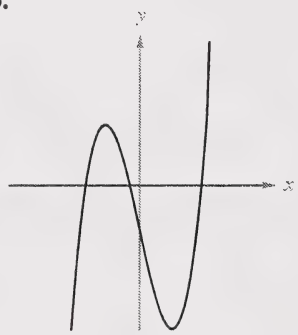
1.



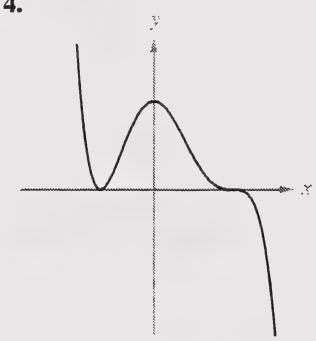
2.



3.



4.



Réponse numérique

1. Associez chacun des graphiques polynomiaux montrés ci-dessus avec la description qui lui correspond.

Un graphique d'une fonction polynomiale du quatrième degré avec un zéro de multiplicité 2 ____
(Notez la réponse dans la colonne 1 de la réponse numérique 1.)

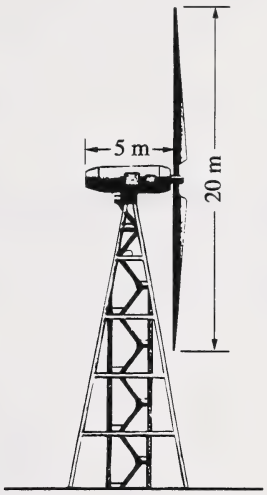
Un graphique avec une ordonnée à l'origine négative ____
(Notez la réponse dans la colonne 2 de la réponse numérique 1.)

Un graphique d'une fonction polynomiale dont le terme du plus haut degré a un coefficient négatif et dont tous les zéros sont de multiplicité 1 ____
(Notez la réponse dans la colonne 3 de la réponse numérique 1.)

Un graphique d'une fonction polynomiale du cinquième degré ____
(Notez la réponse dans la colonne 4 de la réponse numérique 1.)

Utilisez l'information ci-dessous pour répondre à la question suivante.

Les aérogénérateurs peuvent être utilisés pour produire de l'électricité. Dans le diagramme ci-dessous, l'aérogénérateur a une palette en fibre de verre longue de 20 m qui est attachée à un générateur long de 5 m.



8. La longueur de l'arc traversé par un bout de la palette pendant une rotation de $\frac{\pi}{4}$ radians est de

A. $\frac{5\pi}{8}$ m

B. $\frac{5\pi}{4}$ m

C. $\frac{5\pi}{2}$ m

D. 5π m

9. L'amplitude d'une fonction sinusoïdale donnée, $f(\theta) = a \sin\theta + d$, est 6. Si la valeur maximale de f est 8, alors la valeur minimale de f est

A. -8

B. -6

C. -4

D. 2

10. Si $\operatorname{cotg}\theta = -\frac{3}{4}$ et que $\operatorname{cosec}\theta < 0$, alors $\sin^2\theta - \cos^2\theta$ égale

A. -1

B. $-\frac{7}{25}$

C. $\frac{7}{25}$

D. 1

11. L'ensemble complet de solutions de $6\sin(2\theta) - 3 = 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, est

A. $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

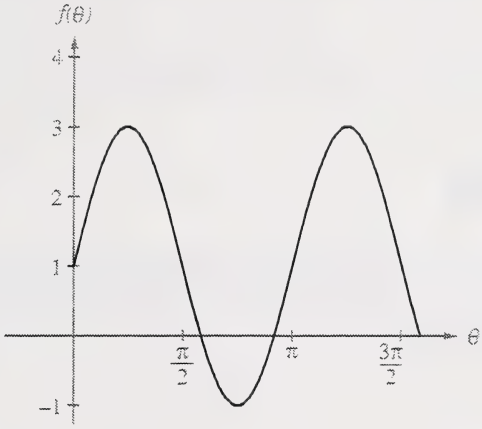
B. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$

Utilisez l'information ci-dessous pour répondre à la question suivante.

Voici un graphique partiel de $f(\theta) = 2 \sin 2\theta + 1$.



12. La période minimale de $f(\theta)$ est

A. $\frac{\pi}{2}$

B. π

C. 2π

D. 4π

---

13. L'ordonnée à l'origine du graphique de $y = a \sin \theta + d$ est

A. d

B. $-d$

C. $a + d$

D. $a - d$

Réponse numérique

2. Si $\theta = 1{,}8$ radians, alors, arrondie au centième près, la valeur de $\sin^2\theta$ est _____ .

(Notez votre réponse dans la section des réponses numériques de la feuille de réponses.)

Réponse numérique

3. Évaluez chacune des quatre expressions trigonométriques ci-dessous. Identifiez l'ordre des valeurs de la plus petite à la plus grande. Indiquez cet ordre en notant le numéro de chaque expression à partir de la première colonne à gauche de la réponse numérique 3.

1 $\operatorname{tg}^2\theta - \sec^2\theta$

2 $\operatorname{tg}\theta - \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

3 $5\sin^2\theta + 5\cos^2\theta$

4 $\dfrac{1}{7}\sin\theta \operatorname{cosec}\theta$

Réponse : ___ ___ ___ ___

(Notez votre réponse dans la section des réponses numériques de la feuille de réponses.)

14. L'expression $\log_a\left(\dfrac{y^3\sqrt{x}}{5}\right)$ équivaut à

A. $\log_a(3y) + \log_a\left(\dfrac{1}{2}x\right) - \log_a 5$

B. $\log_a(3y) + 2\log_a x - \log_a 5$

C. $3\log_a y + \dfrac{1}{2}\log_a x - \log_a 5$

D. $3\log_a y + 2\log_a x - \log_a 5$

15. Marcel a investi P dollars à 3 % composé annuellement pendant une période de 20 ans. Le montant d'argent que Marcel aura à la fin de chaque année augmente par rapport au montant d'argent qu'il avait à la fin de l'année précédente par un facteur de

A. 0,03

B. P

C. 1,03

D. $1{,}03P$

16. Si $\log_x\left(\frac{1}{9}\right) = -2$, alors la valeur de x est

A. 3

B. –3

C. $\frac{1}{3}$

D. $-\frac{1}{3}$

17. Si $\log x = 2{,}4$ et que $\log y = -1{,}6$, alors la valeur de $\frac{x}{y}$ est

A. –1,5

B. 4

C. $10^{-1{,}5}$

D. 10^4

18. Le nombre de bacilles E. coli au temps t en heures est donné par $N(t) = N_0(8)^t$, où N_0 est le nombre initial de bacilles au temps $t = 0$. Si le nombre initial de bacilles est de 4 000, alors le nombre attendu de bacilles 1 h 15 min plus tard est de

A. 4 600

B. 5 000

C. 43 713

D. 53 817

19. Une élève veut tracer le graphique de $y = \log_3 x$ sur une calculatrice, mais sa calculatrice peut tracer le graphique de fonctions logarithmiques seulement si les équations sont exprimées en logarithmes communs. Elle pourrait obtenir le graphique de $y = \log_3 x$ en traçant le graphique de

A. $y = \dfrac{\log x}{3}$

B. $y = \dfrac{\log x}{\log 3}$

C. $y = \log(x - 3)$

D. $y = \log\left(\dfrac{x}{3}\right)$

Utilisez l'information ci-dessous pour répondre à la question suivante.

Un faisceau de lumière traverse un morceau de matériau opaque. L'intensité I du faisceau de lumière quand il quitte le matériau est donnée par

$$I = \left(4^{-ct}\right)I_0,$$

où I_0 est l'intensité initiale, c est le facteur d'absorption et t est l'épaisseur du matériau en centimètres.

20. Si on connaît l'intensité I du faisceau, l'intensité initiale I_0 et le facteur d'absorption c et que $\frac{I}{I_0} = R$, alors une expression pour t est

A. $\frac{-\log R}{4c}$

B. $\frac{-\log R}{c \log 4}$

C. $\frac{-1}{c}\log\left(\frac{R}{4}\right)$

D. $\frac{-\log\left(R-4\right)}{c}$

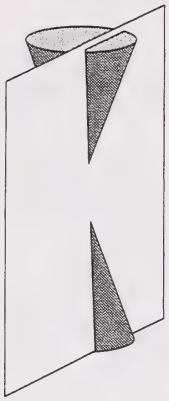
Réponse numérique

4. Étant donné l'équation $\log_9 x = \log_4 64$, la valeur de x, arrondie à l'entier près, est _____ .

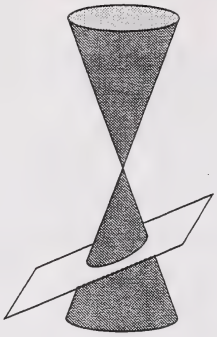
(Notez votre réponse dans la section des réponses numériques de la feuille de réponses.)

21. Le diagramme qui illustre **le mieux** la façon dont un plan intersecte un cône à double nappe formant une hyperbole non dégénérée est

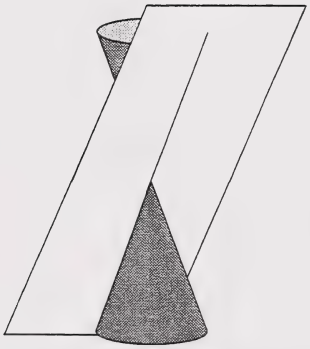
A.



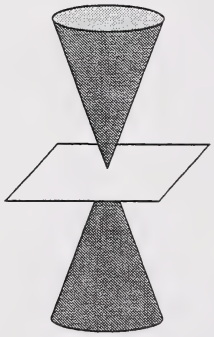
B.



C.

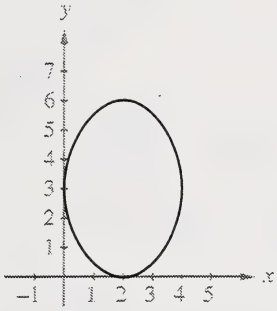


D.

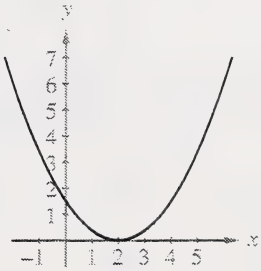


Utilisez l'information ci-dessous pour répondre à la question suivante.

Monique et Paul doivent tracer le graphique de la relation quadratique $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ pour des valeurs données de A, C, D, E et F. Monique a entré la relation de façon correcte, obtenant le graphique ci-dessous à gauche. Paul a oublié par accident d'entrer un terme et a obtenu le graphique ci-dessous à droite.



Le graphique de Monique



Le graphique de Paul

22. Le terme oublié par Paul mais non par Monique était

A. Ax^2

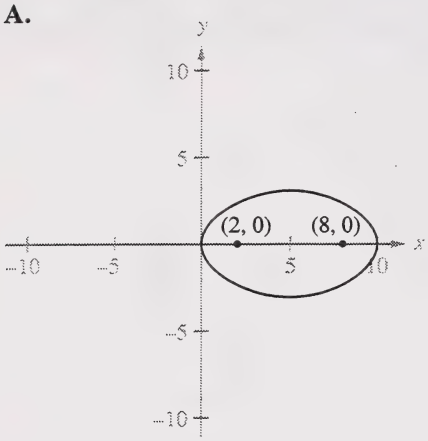
B. Cy^2

C. Dx

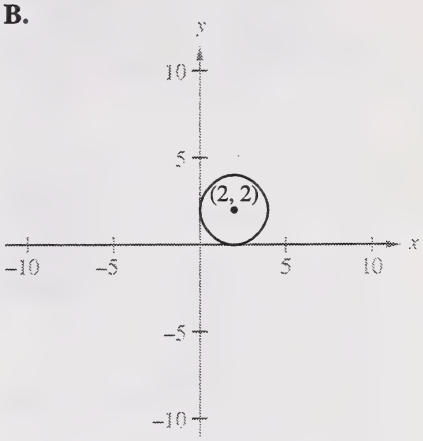
D. Ey

23. Une relation quadratique est donnée par l'équation $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, où $A \times C \times D \times E = 0$. On montre les foyers de l'ellipse et de l'hyperbole, le centre du cercle et le sommet de la parabole. Lequel des graphiques ci-dessous **ne pourrait pas** être le graphique de cette relation quadratique?

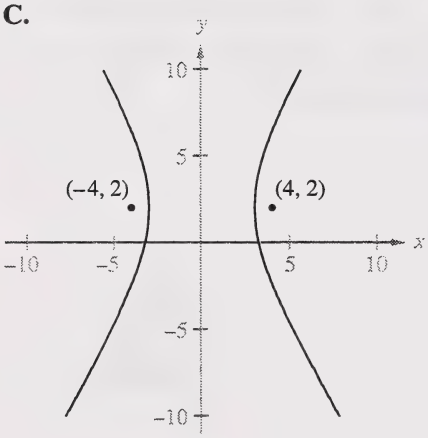
A.



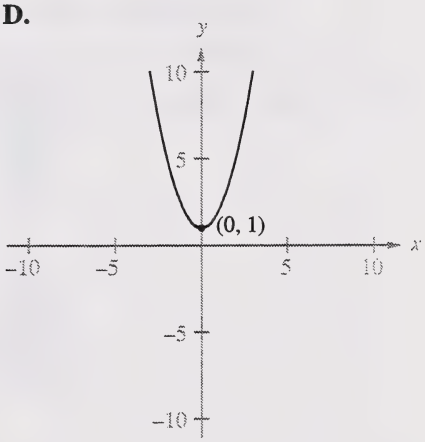
B.



C.

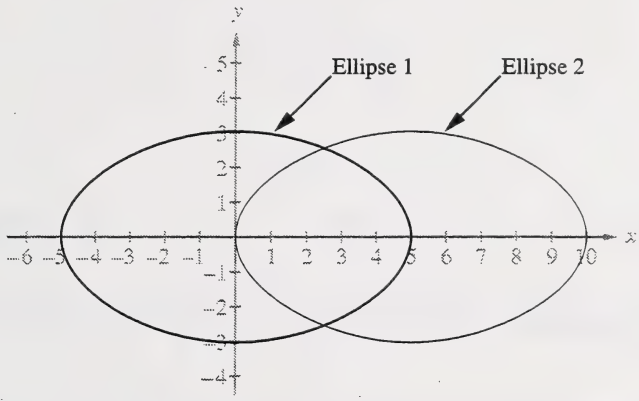


D.



Utilisez l'information ci-dessous pour répondre à la question suivante.

On montre ci-dessous deux ellipses qui ont des formes identiques. On obtient le graphique de l'ellipse 2 en déplaçant le graphique de l'ellipse 1 de cinq unités vers la droite.



24. Lequel des énoncés suivants relatifs aux ellipses est **vrai**?

A. Les valeurs des excentricités des ellipses sont différentes.

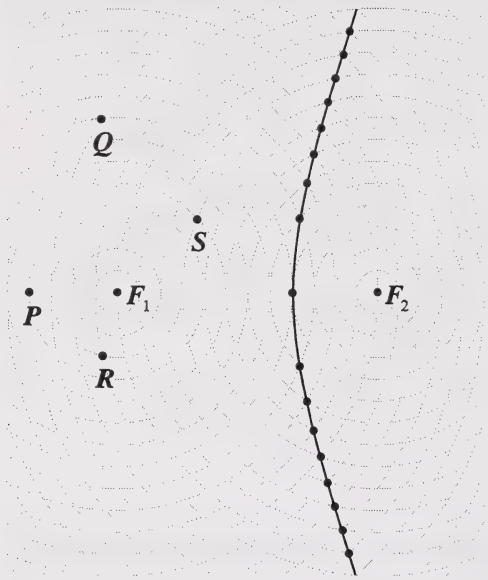
B. L'équation générale de chaque ellipse est $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, où les valeurs des paramètres A, C et F sont les mêmes.

C. Les foyers sont plus rapprochés dans la première ellipse que dans la seconde.

D. La somme des distances à partir d'un point sur une ellipse jusqu'à ses foyers est la même pour chaque ellipse.

Utilisez l'information ci-dessous pour répondre à la question suivante.

Voici une branche d'une hyperbole avec des foyers aux points F_1 et F_2.



25. Un point qui pourrait se trouver sur l'autre branche de l'hyperbole est

A. S
B. Q
C. R
D. P

26. L'équation $\dfrac{\sqrt{x^2 + (y-5)^2}}{\sqrt{(y-2)^2}} = \dfrac{a}{b}$, où $0 < \dfrac{a}{b} < 1$, définit une famille d'ellipses avec un foyer au point

A. $(0, 2)$
B. $(0, -2)$
C. $(0, 5)$
D. $(0, -5)$

Réponse numérique

5. Une parabole qui a un sommet au point $(1, 2)$ et un foyer au point $(c, 2)$ a une directrice définie par $x = -15$. La valeur de c, arrondie au dixième près, est _____ .

(Notez votre réponse dans la section des réponses numériques de la feuille de réponses.)

27. Si la formule récursive d'une suite est

$$\begin{cases} t_1 = m \\ t_n = 3t_{n-1} - 2, \ n \geq 2, \ n \in N^*, \end{cases}$$

alors le troisième terme, t_3, est

A. $3m - 2$
B. $9m - 8$
C. $18m - 20$
D. $27m - 26$

28. La somme des 10 premiers termes de la suite arithmétique $\sin\theta,\ 2\sin\theta,\ 3\sin\theta, \ldots, 10\sin\theta$ est 44. La valeur de la différence commune est

A. 0,20

B. 0,73

C. 0,80

D. 0,88

29. La somme des termes d'une suite est représentée par $S_n = n^2 + 4n,\ n \geq 1,\ n \in N^*$. Le terme général de la suite est

A. $t_n = 5\left(\frac{8}{5}\right)^{n-1}$

B. $t_n = 5(3)^{n-1}$

C. $t_n = 3n + 2$

D. $t_n = 2n + 3$

30. Les points $P(1, k)$, $Q(2, 4)$ et $R(3, 2)$ se trouvent tous sur une ligne droite. Les coordonnées y des points P, Q et R forment une suite à trois termes. Si $t_1 = k$, $t_2 = 4$ et $t_3 = 2$, alors la valeur de k et le type de suite sont respectivement

A. 6 et arithmétique

B. 8 et arithmétique

C. 6 et géométrique

D. 8 et géométrique

31. Une série géométrique ayant la raison $\sqrt{3}$ est décrite par

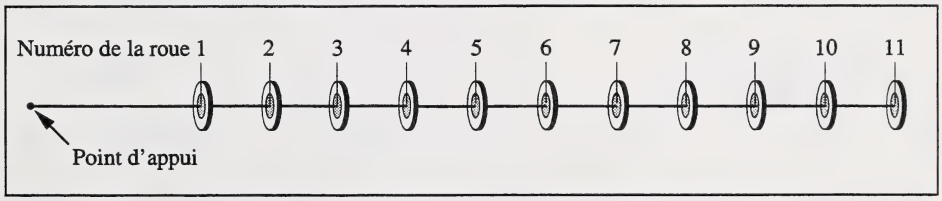
A. $\sum_{n=1}^{k} \left(\sqrt{3}\right)^n$

B. $\sum_{n=1}^{k} \left(3+\sqrt{3}\right)^n$

C. $\sum_{n=1}^{k} \sqrt{3}n$

D. $\sum_{n=1}^{k} \left(3+\sqrt{3}\right)n$

Utilisez l'information ci-dessous pour répondre à la question suivante.



32. Quelques fermiers irriguent leurs champs en utilisant un système de pompage de l'eau au long d'un tuyau. Le tuyau est appuyé et actionné par des roues. La première roue est attachée à 50 m d'un point d'appui et toutes les autres roues sont attachées à des intervalles de 20 m au long du tuyau. Ces roues bougent dans des cercles concentriques dont le centre est au point d'appui. Arrondie au mètre près, la **circonférence** du cercle traversé par la 11e roue est de

A. 1 571 m

B. 1 650 m

C. 1 696 m

D. 1 920 m

Réponse numérique

6. La somme des 30 premiers termes d'une série arithmétique est 4 425. Si le dernier terme est 220, alors la valeur du premier terme, arrondie au dixième près, est _____ .

(Notez votre réponse dans la section des réponses numériques de la feuille de réponses.)

33. Une fille qui s'appelle **Kristi Whittall** découvre que son nom est souvent mal orthographié. Son prénom est orthographié sous la forme Kristi, Christi, Kristy et Christy. Son nom de famille est orthographié sous la forme Whittall, Whittle, Whitall, Wittal et Whidall. Si on suppose que ces formes représentent toutes les variations d'orthographe de son prénom et de son nom de famille, alors le nombre total de variations d'orthographe, correctes et incorrectes, de son nom en entier est de

A. 7

B. 9

C. 12

D. 20

34. Quel est le nombre d'arrangements distincts qu'on puisse faire avec les lettres du mot **ACCROCHE** si dans chaque arrangement, on doit utiliser toutes les lettres?

A. $\frac{8!}{3!}$

B. $8!$

C. $6!$

D. $8! - 3!$

35. De combien de façons peut-on diviser une classe de 15 gymnastes en 3 groupes de sorte qu'on ait 3 gymnastes dans un groupe, 5 gymnastes dans un deuxième groupe et 7 gymnastes dans un troisième groupe?

A. 105

B. 2 184

C. 360 360

D. 3 628 800

36. Vous voulez téléphoner à un ami, mais vous avez oublié une partie de son numéro de téléphone à sept chiffres. Vous savez que les trois premiers chiffres sont 555. Quelle est la probabilité que vous composiez le numéro de téléphone correct au premier essai?

A. $\frac{21}{1\,000}$

B. $\frac{1}{10\,000}$

C. $\frac{63}{125}$

D. $\frac{1}{3\,628\,800}$

37. Le développement binomial de $(2x-3)^{2n-1}$ a 16 termes. La valeur de n est

A. 8

B. 9

C. 15

D. 16

Réponse numérique

7. Les parents de Patrick lui demandent de faire les travaux suivants :

- porter les ordures dehors à la boîte à ordures
- nettoyer sa chambre à coucher
- passer l'aspirateur dans la salle de séjour
- conduire son frère à sa leçon de piano
- laver la voiture
- laver la vaisselle
- nettoyer la salle de bains

Ils demandent à Patrick de conduire d'abord son frère à sa leçon de piano et ensuite de faire le **reste** des travaux dans n'importe quel ordre. Dans combien d'ordres différents Patrick pourrait-il faire le reste des travaux?

Réponse : _____

(Notez votre réponse dans la section des réponses numériques de la feuille de réponses.)

Réponse numérique

8. Le nombre de façons distinctes dont on peut arranger 9 verres d'eau autour de l'extérieur d'une table ronde, si seulement 3 verres sont identiques, est de _____ .

(Notez votre réponse dans la section des réponses numériques de la feuille de réponses.)

38. Une mesure de dispersion d'un ensemble de données est

A. la moyenne

B. la médiane

C. le mode

D. l'écart-type

39. Votre note de 80 à un test standardisé est supérieure aux notes de 97 % des élèves qui ont passé le test. Si les notes subissent une distribution normale avec une moyenne de 62, alors l'écart-type approximatif est de

A. 6,0
B. 9,6
C. 12,0
D. 19,2

40. Le nombre de jeunes hommes qui fréquentent un collège est de 1 290. Leurs âges subissent une distribution normale et leur âge moyen est de 22 ans avec un écart-type de 1,4 ans. Si les étudiants qui dépassent l'âge de 25 ans sont classifiés comme étudiants adultes, alors le nombre approximatif de jeunes hommes qui sont classifiés comme étudiants adultes est de

A. 21
B. 28
C. 63
D. 83

Réponse numérique

9. Pour une distribution normale type, la probabilité d'obtenir une cote z entre $z = 1{,}72$ et $z = 1{,}98$, arrondie au centième près, est de _____ .

(Notez votre réponse dans la section des réponses numériques de la feuille de réponses.)

Les questions à réponse écrite suivent à la page 26.

À l'usage exclusif du service

Utilisez l'information ci-dessous pour répondre à la question suivante.

On demande à un élève de tracer les deux ellipses représentées par le cas 1 et le cas 2 décrits ci-dessous.

Cas 1 La valeur de l'excentricité d'une ellipse est de $\frac{2}{3}$ et la distance entre la directrice et le foyer est de 5 unités.

Cas 2 La distance entre F_1 et F_2 d'une ellipse est de 12 unités. La somme des distances à partir d'un point, P, sur l'ellipse jusqu'à deux points fixes, F_1 et F_2, est de 14 unités.

Réponse écrite — 10 %

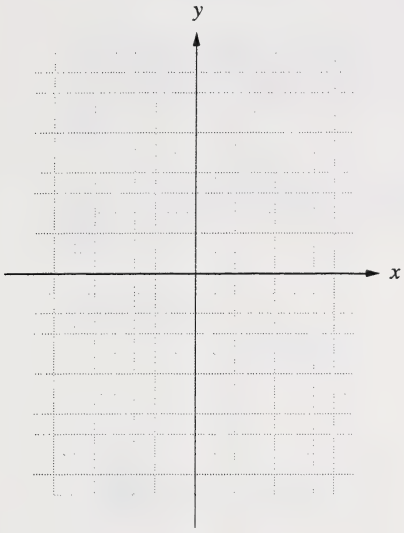
1. Lorsque les élèves étudient les relations quadratiques, ils utilisent d'habitude trois types de papier graphique. À la page suivante, on montre un exemple de chaque type de papier graphique.

- Identifiez lequel des trois types de papier graphique serait le plus approprié pour tracer l'ellipse représentée par le cas 1 et lequel serait le plus approprié pour tracer l'ellipse représentée par le cas 2.

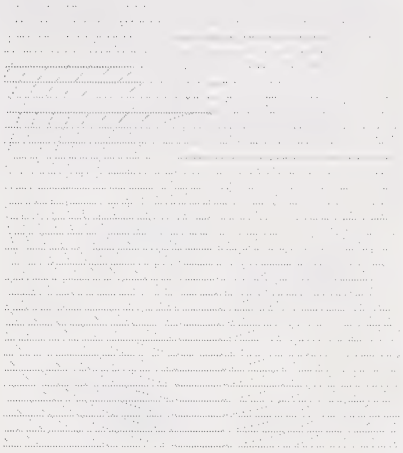
- Décrivez clairement les étapes que vous suivriez pour tracer l'ellipse **pour le cas 1 ou** l'ellipse **pour le cas 2**.

La question à réponse écrite 1 continue à la page suivante.

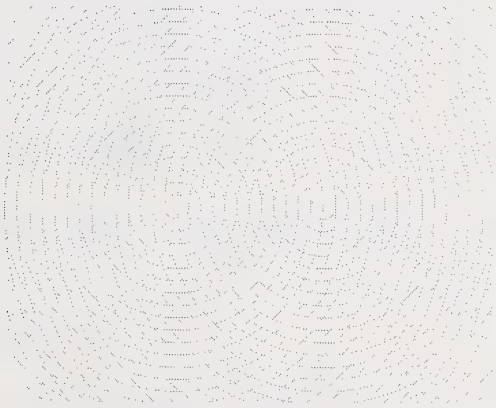
Papier graphique 1



Papier graphique 2



Papier graphique 3



La question à réponse écrite 1 continue à la page suivante.

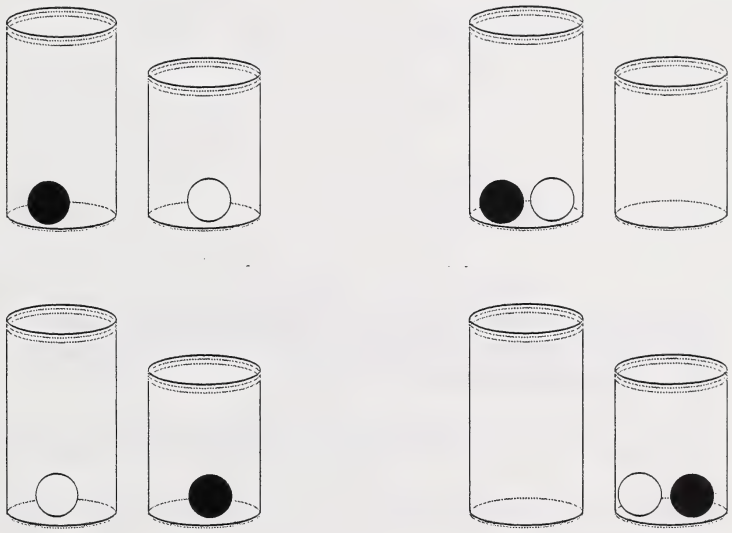
À l'usage exclusif du service

La question à réponse écrite 2 commence à la page suivante.

Utilisez l'information ci-dessous pour répondre à la question suivante.

Le nombre de façons dont on peut placer des ballons distincts dans deux bocaux de dimensions différentes est une fonction du nombre de ballons qu'on utilise. La fonction est $f(n) = 2^n$, $n \in \mathrm{N}^*$, où n est le nombre de ballons.

Voici dans le diagramme ci-dessous toutes les façons dont on peut placer un ballon noir et un ballon blanc dans deux bocaux de dimensions différentes.



Supposez que les ballons entreront toujours dans les bocaux.

Réponse écrite — 10 %

2. • Complétez le tableau ci-dessous pour qu'il montre la relation entre n'importe quel nombre de ballons distincts de 1 jusqu'à 5 inclusivement, et le nombre de façons dont on peut placer les ballons dans deux bocaux de dimensions différentes.

n	1	2	3	4	5
$f(n)$					

La question à réponse écrite 2 continue à la page suivante.

- Évaluez $\sum_{k=1}^{12} f(k)$.

- Une autre expression représentant le nombre de façons dont on peut placer 4 ballons de couleur différente dans deux bocaux de dimensions différentes est

  $({}_4C_4 \times {}_0C_0) + ({}_4C_3 \times {}_1C_1) + ({}_4C_2 \times {}_2C_2) + ({}_4C_1 \times {}_3C_3) + ({}_4C_0 \times {}_4C_4)$.

  Expliquez ce que le terme $({}_4C_2 \times {}_2C_2)$ représente dans le contexte de ce problème.

La question à réponse écrite 2 continue à la page suivante.

- Les deux bocaux doivent être distincts, par exemple avoir des dimensions différentes, pour que la fonction $f(n) = 2^n$, $n \in \mathrm{N}^*$ représente le nombre de façons dont on peut placer n ballons distincts dans deux bocaux.

Trouvez une fonction, g, qui représente le nombre de façons dont on peut placer n ballons distincts dans deux bocaux identiques. Justifiez votre réponse.

La question à réponse écrite 3 commence à la page suivante.

À l'usage exclusif du service

Utilisez l'information ci-dessous pour répondre à la question suivante.

Les tableaux ci-dessous ont été correctement remplis par deux élèves. La suite t_n est géométrique.

Élève A

n	1	2	3	4
t_n	1	3	9	27
$\log_c(t_n)$	0	1	2	3

Élève B

n	1	2	3	4
t_n	1	3	9	27
$\log_d(t_n)$	0	0,6826	1,3652	2,0478

L'élève B a calculé $\log_d(t_n)$, arrondi au dix millième près.

Réponse écrite — 10 %

3. • Trouvez une expression pour t_n et calculez la valeur de t_{10}.

• Calculez la valeur de c dans l'expression $\log_c(t_n)$.

La question à réponse écrite 3 continue à la page suivante.

- Calculez la valeur de d, arrondie à l'entier près, dans l'expression $\log_d(t_n)$.

- Après avoir étudié le tableau, un élève fait la prédiction suivante : « Étant donné les termes d'une suite géométrique, la suite des logarithmes de chacun de ces termes va produire une nouvelle suite de valeurs qui est arithmétique. »

  Pour prouver cette prédiction, l'élève écrit la suite géométrique générale de n termes sous la forme a, ar, $ar^2, \ldots, ar^{n-1}$.

  Le logarithme de chaque terme de cette suite géométrique produit la suite suivante :

  $$\log(a),\ \log(ar),\ \log(ar^2), \ldots, \log(ar^{n-1})$$

  Écrivez un argument logique pour prouver que cette suite d'expressions logarithmiques est arithmétique.

Vous avez maintenant terminé l'examen.
S'il vous reste du temps, vous voudrez peut-être vérifier vos réponses.

Mathématiques 30–feuille de formules

L'information suivante peut vous être utile au cours de cet examen.

- Les racines de l'équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0$ sont

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- La distance entre deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Relations quadratiques

- $e = \dfrac{|\overline{PF}|}{|\overline{PD}|}$

Trigonométrie

- longueur de l'arc $a = r\theta$
- $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
- $1 + \text{tg}^2 A = \sec^2 A$
- $1 + \text{cotg}^2 A = \text{cosec}^2 A$
- $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
- $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
- $\text{cosec}\, A = \dfrac{1}{\sin A}$
- $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$
- $\text{cotg}\, A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$
- $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

Permutations et combinaisons

- ${}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
- ${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$
- Dans le développement de $(x + y)^n$, le terme général est $t_{k+1} = {}_nC_k x^{n-k} y^k$

Suites et séries

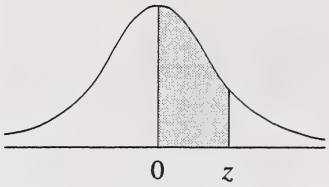
- $t_n = a + (n-1)d$
- $S_n = \dfrac{n[2a + (n-1)d]}{2}$
- $S_n = n\left(\dfrac{a + t_n}{2}\right)$
- $t_n = ar^{n-1}$
- $S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$, $r \neq 1$
- $S_n = \dfrac{rt_n - a}{r - 1}$, $r \neq 1$

Fonctions exponentielles et logarithmiques

- $\log_a mn = \log_a m + \log_a n$
- $\log_a \dfrac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$
- $\log_a m^n = n \log_a m$

Plier et détacher le long du pointillé.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$



Aires sous la courbe type normale

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

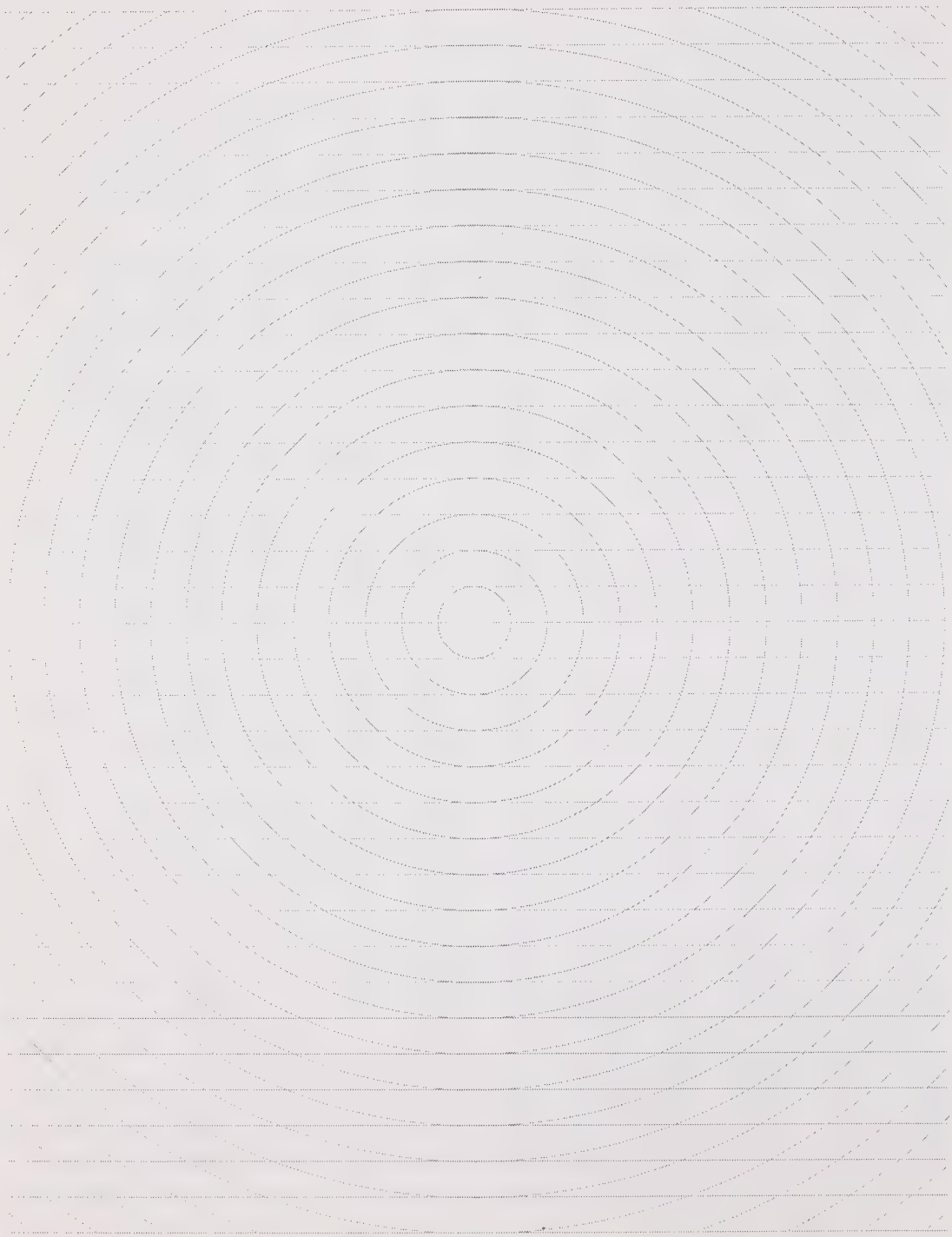
Plier et détacher le long du pointillé.

Page détach

On ne donnera pas de points pour le travail fait sur cette page.

Plier et détacher le long du pointillé.

On ne donnera pas de points pour le travail fait sur cette page.



Plier et détacher le long du pointillé.

Page à détacher

On ne donnera pas de points pour le travail fait sur cette page.

Plier et détacher le long du pointillé.

Page à détacher

On ne donnera pas de points pour le travail fait sur cette page.

Plier et détacher le long du pointillé.

Page à détacher

On ne donnera pas de points pour le travail fait sur cette page.

Plier et détacher le long du pointillé.

Page à détacher

On ne donnera pas de points pour le travail fait sur cette page.

Plier et détacher le long du pointillé.

Mathématiques 30
Juin 1998

Apply Label With Student's Name

Mathématiques 30

(Nom de famille) (Prénom)

Nom : **Date de naissance :** A M J **Sexe :**

Adresse postale :

(Apt./Rue/Ave./Case postale) (Village/Ville) (Code postal)

Code de l'école : **École :** **Signature:**

À l'usage exclusif du service

C1 C2 C3 C4

Apply Label Without Student's Name

Mathématiques 30

Mathematics 30
Diploma Examination
June 1998

Multiple-Choice Key,
Numerical-Response Key,
and
Sample Answers to
Written-Response
Questions

MATHEMATICS 30 — June 1998

MULTIPLE-CHOICE KEY

1.	D	**21.**	A
2.	C	**22.**	B
3.	C	**23.**	B
4.	B	**24.**	D
5.	B	**25.**	A
6.	D	**26.**	C
7.	A	**27.**	B
8.	C	**28.**	C
9.	C	**29.**	D
10.	C	**30.**	A
11.	D	**31.**	A
12.	B	**32.**	A
13.	A	**33.**	D
14.	C	**34.**	A
15.	C	**35.**	C
16.	A	**36.**	B
17.	D	**37.**	A
18.	D	**38.**	D
19.	B	**39.**	B
20.	B	**40.**	A

NUMERICAL-RESPONSE KEY

1. 2314
2. 0.95
3. 1243
4. 729
5. 17.0
6. 75.0
7. 720
8. 6720
9. 0.02

SAMPLE ANSWERS TO THE WRITTEN-RESPONSE SECTION

Note: The responses that follow represent **ONE** approach to each of the problems. During the diploma examination marking session, provision is made for considering the various approaches students may have used.

Sample Answer for Written Response 1—Total: 5 marks

Use the following information to answer the next question.

A student is required to sketch the two ellipses represented by Case 1 and Case 2 below.

Case 1 The value of the eccentricity of an ellipse is $\frac{2}{3}$, and the distance between the directrix and the focus is 5 units.

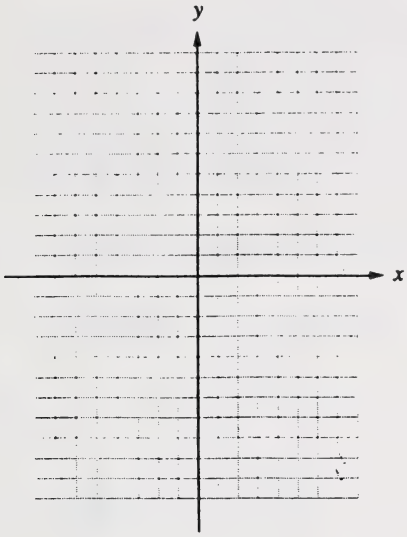
Case 2 For an ellipse, the distance between F_1 and F_2 is 12 units. The sum of the distances from a point, P, on the ellipse to two fixed points, F_1 and F_2, is 14 units.

Written Response — 10%

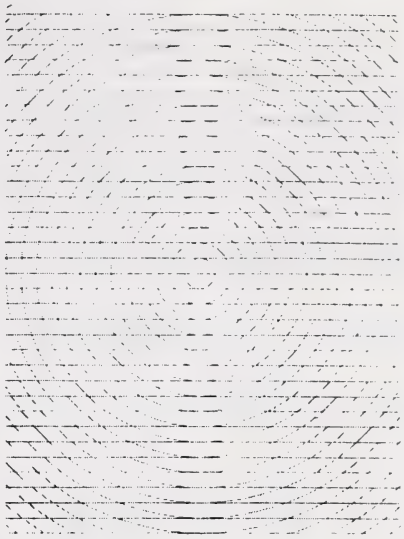
1. Three types of graph paper are commonly used when students are studying quadratic relations. An example of each type of graph paper is shown on the next page.

- Identify which of the three types of graph paper would be most appropriate to use to draw the ellipse in Case 1 and which would be most appropriate to use to draw the ellipse in Case 2.
- Clearly describe the steps that you would take to sketch the ellipse **for either Case 1 or Case 2**.

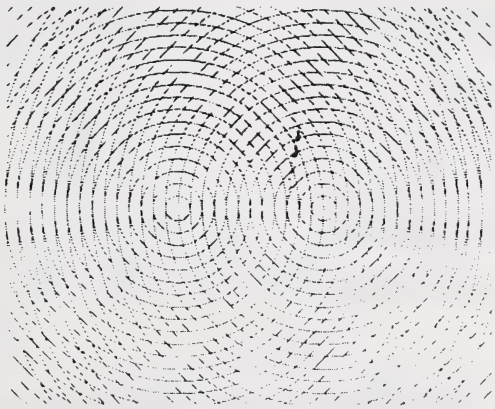
Graph Paper 1



Graph Paper 2



Graph Paper 3



ONE POSSIBLE SOLUTION

1:

•choose the circle–line graph paper

•plot the point that is the centre of all the circles on the paper — this is the focus

•draw a line 5 units away from the focus — this is the directrix

•any point, P, on this ellipse has $\frac{|PF|}{|PD|} = \frac{2}{3}$. To calculate the distance PF, count the number of circles away from the centre, and to calculate PD, count the number of lines away from the directrix. The ratio 2:3 is equivalent to 4:6, 6:9, 8:12... Use these ratios to determine the location of points on the curve. For example, find all such points 4 units away from the focus and 6 units away from the directrix.

•the points are joined to form an ellipse

2:

•choose the circle–circle graph paper

•label the centre of one set of circles as F_1, and label the centre of the other set of circles as F_2

•to determine $\overline{PF_1}$, count the number of circles away from F_1 that the point P lies

•determine $\overline{PF_2}$ in a similar fashion as $\overline{PF_1}$

•each point on the ellipse satisfies $\left|\overline{PF_1}\right| + \left|\overline{PF_2}\right| = 14$. Find points on the ellipse by finding the circle x units away from F_1 and the circle $14 - x$ away from F_2, and label the point(s) of intersection of both circles. Let $1 \le x \le 13$, $x \in N$.

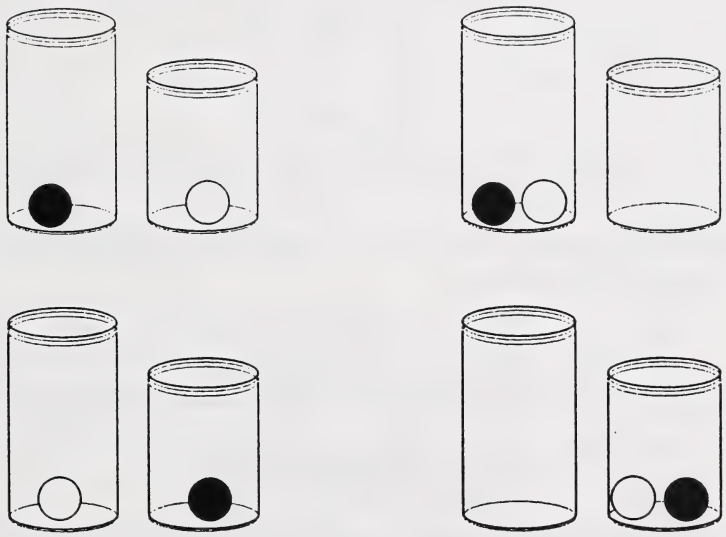
•the points are joined to form an ellipse

Sample Answer for Written Response 2—Total: 5 marks

Use the following information to answer the next question.

The number of ways that you can place distinguishable balls in two jars of different sizes is a function of the number of balls you use. The function is $f(n) = 2^n$, $n \in \mathrm{N}$, where n is the number of balls.

Shown in the diagram below are all the ways of placing a black ball and a white ball in two jars of different sizes.



Assume that the balls will always fit in the jars.

Written Response — 10%

2. • Complete the chart below so that it shows the relation between any number of distinguishable balls from 1 through 5 inclusive, and the number of ways that the balls can be placed in two jars of different sizes.

ONE POSSIBLE SOLUTION

n	1	2	3	4	5
$f(n)$	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**

- Evaluate $\sum_{k=1}^{12} f(k)$.

ONE POSSIBLE SOLUTION
$\sum_{k=1}^{12} f(k) = 2 + 4 + 8 + \ldots 2^{12}$ or $S_{12} = \frac{2(2^{12} - 1)}{2 - 1}$ $= 8\ 190$

- Another expression representing the number of ways 4 different coloured balls can be placed in two jars of different sizes is

$$({}_4C_4 \times {}_0C_0) + ({}_4C_3 \times {}_1C_1) + ({}_4C_2 \times {}_2C_2) + ({}_4C_1 \times {}_3C_3) + ({}_4C_0 \times {}_4C_4).$$

Explain what the term $({}_4C_2 \times {}_2C_2)$ represents in the context of this problem.

ONE POSSIBLE SOLUTION
${}_4C_2 \times {}_2C_2$ represents choosing 2 balls from a total of 4 balls and placing them in the large jar and then placing the remaining 2 balls in the small jar.

- The two jars must be distinguishable, for example different sizes, in order for the function $f(n) = 2^n$, $n \in \mathrm{N}$ to represent the number of ways n distinguishable balls can be placed in the two jars.

Determine a function, g, that represents the number of ways n distinguishable balls can be placed in two identical jars. Justify your answer.

ONE POSSIBLE SOLUTION
Since the jars are not distinguishable placing j balls in the first jar and m balls in the second jar is indistinguishable from placing m balls in the first jar and j in the second. There will be $\frac{1}{2}$ the number of ways, so $g(n) = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$.

Sample Answer for Written Response 3—Total: 5 marks

Use the following information to answer the next question.

The following tables were correctly completed by two students. The sequence t_n is geometric.

Student A

n	1	2	3	4
t_n	1	3	9	27
$\log_c(t_n)$	0	1	2	3

Student B

n	1	2	3	4
t_n	1	3	9	27
$\log_d(t_n)$	0	0.6826	1.3652	2.0478

Student B determined $\log_d(t_n)$, correct to the nearest ten thousandth.

Written Response — 10%

3. • Determine an expression for t_n and find the value of t_{10}.

ONE POSSIBLE SOLUTION

$$t_n = 3^{n-1}$$

$$t_{10} = 3^9 = 19\,683$$

• Determine the value of c in the expression $\log_c(t_n)$.

ONE POSSIBLE SOLUTION

$$\log_c(27) = 3$$

$$c^3 = 27$$

$$c = 3$$

- Determine the value of d, correct to the nearest whole number, in the expression $\log_d(t_n)$.

ONE POSSIBLE SOLUTION
$\log_d(27) = 2.0478$ $d^{2.048} = 27$ $d = 27^{\frac{1}{2.0478}}$ $d = 5$

- Upon examining the table, a student makes the following prediction. "Given the terms of a geometric sequence, the sequence of logarithms of each of these terms will produce a new sequence of values that is arithmetic."

  In order to prove this prediction, the student writes the general geometric sequence of n terms as $a,\ ar,\ ar^2, \ldots, ar^{n-1}$.

  The logarithm of each term of this geometric sequence produces the following sequence:

$$\log(a),\ \log(ar),\ \log(ar^2), \ldots, \log(ar^{n-1})$$

  Write a logical argument to prove that this sequence of logarithmic expressions is arithmetic.

ONE POSSIBLE SOLUTION
$\log(a), \log(ar), \log(ar^2), \ldots, \log(ar^{n-1})$ $= \log(a), \log(a) + \log(r), \log(a) + \log(r^2), \ldots, \log(a) + \log(r^{n-1})$ $= \log(a), \log(a) + \log(r), \log(a) + 2\log(r), \ldots, \log(a) + (n-1)\log(r)$ Each term has $\log(a)$ and each consecutive term has 1 additional factor of $\log(r)$, hence the sequence is arithmetic with a common difference of $\log(r)$.

University of Alberta Library
0 1620 0876 3854